223

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Un résultat assez inattendu d'arithmétique des lois de probabilité.* Note (*) de MM. **Ronald Aylmer Fisher** et **Daniel Dugué**, présentée par M. Émile Borel.

On connaît les travaux de MM. Paul Lévy, Cramer et Raikoff sur la décomposition des variables aléatoires en somme de variables indépendantes (1).

Dans le second mémoire M. Paul Lévy énonce comme très vraisemblable le résultat suivant établi depuis par M. H. Cramer :

Une variable de Gauss ne peut être décomposée en somme de deux variables indépendantes que si ces dernières sont des variables de Gauss.

Ce même résultat a été établi pour les lois de Poisson par MM. Paul Lévy et Raikoff. Un exemple donné en 1941 par un des auteurs de cette Note montre que ce théorème ne peut être étendu à toutes les lois stables, en particulier à la loi de Cauchy. En relation avec ce théorème fondamental, on pouvait se poser la question suivante :

Deux variables aléatoires étant données, dont aucune ne peut être décomposée en deux variables indépendantes dont l'une obéit à la loi de Gauss (ou de Poisson), leur somme peut-elle être décomposée en deux variables aléatoires indépendantes dont l'une obéit à la loi de Gauss (ou de Poisson).

MM. Paul Lévy et D. Dugué ont donné des exemples pour la loi de Poisson de décompositions de cette nature.

Le but de la présente Note est de donner un exemple pour la loi de Gauss.

Soient deux variables indépendantes toutes deux de même fonction caractéristique

$$e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}}\left[\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\cos t-\frac{1}{5}\right].$$

Leur loi de probabilité élémentaire est

$$\frac{1}{5}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+2)^2\alpha^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2\alpha^2}{2}}\right]$$
$$+\frac{2}{5}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2\alpha^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2\alpha^2}{2}}\right]-\frac{1}{5}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2\alpha^2}{2}}.$$

(*) Séance du 29 novembre 1948.

(1) *Voir* en particulier P. Lévy, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 1937, p. 231; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1935, p. 347; 1938, p. 17.

Si α est tel que $e^{-(\alpha^2/2)} = u$ satisfasse à l'égalité

$$2u^4 + 4u = 1,$$

la loi de probabilité élémentaire s'annule pour $x = 0$ et par conséquent aucune des deux variables aléatoires obéissant à cette loi de probabilité ne peut être décomposée en deux variables indépendantes dont l'une est de Gauss.

Leur somme a pour fonction caractéristique

$$e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}\left[\frac{2}{25}\cos 4t + \frac{8}{25}\cos 3t + \frac{4}{25}\cos 2t + \frac{11}{25}\right].$$

Cette somme peut donc être décomposée en une variable de Gauss d'écart type $\sqrt{2}/\alpha$ et une variable discontinue prenant les valeurs -4 et $+4$ avec la probabilité $1/25$, -3 et $+3$ avec la probabilité $4/25$, -2 et $+2$ avec la probabilité $2/25$ et 0 avec la probabilité $11/25$.

Il est facile de généraliser cet exemple : la fonction caractéristique

$$e^{-\frac{t^2}{2\alpha^2}}[a\cos 2t + b\cos t - c] \qquad (a, b, c > 0)$$

a la même propriété avec u racine de $au^4 + bu = c$ et $b^2 > 4ac$ $a > c$.