THESIS

Submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of

DOCTOR OF PHILOSOPHY
AT THE UNIVERSITY OF ADELAIDE

Delivered by:
The University of Adelaide

Discipline:
Pure Mathematics

HIGHER TANNAKA DUALITY

by
James WALLBRIDGE

Date:
8 July 2011

Jury:
Lawrence BREEN, University of Paris 13
Denis-Charles CISINSKI, University Paul Sabatier
Varghese MATHAI, University of Adelaide
Carlos SIMPSON, University of Nice Sophia Antipolis
Joseph TAPIA, University Paul Sabatier
Bertrand TOËN, University of Montpellier II

Faculty: Engineering, Computer and Mathematical Sciences.
School: Mathematical Sciences.
Directors: Varghese MATHAI, Bertrand TOËN.
Reporters: Jacob LURIE, Carlos SIMPSON.

Abstract

In this thesis we prove a Tannaka duality theorem for $(\infty, 1)$-categories. Classical Tannaka duality is a duality between certain groups and certain monoidal categories endowed with particular structure. Higher Tannaka duality refers to a duality between certain derived group stacks and certain monoidal $(\infty, 1)$-categories endowed with particular structure. This higher duality theorem is defined over derived rings and subsumes the classical statement. We compare the higher Tannaka duality to the classical theory and pay particular attention to higher Tannaka duality over fields. In the later case this theory has a close relationship with the theory of schematic homotopy types of Toën. We also describe three applications of our theory: perfect complexes and that of both motives and its non-commutative analogue due to Kontsevich.

Résumé

Dans cette thèse, nous prouvons un théorème de dualité de Tannaka pour les $(\infty, 1)$-catégories. La dualité classique de Tannaka est une dualité entre certains groupes et catégories monoïdales munies d'une structure particulière. La dualité de Tannaka supérieure renvoie, elle, à une dualité entre certains champs en groupes dérivés et certaines $(\infty, 1)$-catégories monoïdales munies d'une structure particulière. Cette dualité supérieure est définie sur les anneaux dérivés et englobe la théorie de dualité classique.

D'un côté, la correspondance de la dualité supérieure décrit les catégories monoïdales symétriques supérieures. Nous présentons ici la théorie générale des (∞, n)-catégories $\mathcal{O}$-monoïdales qui contient les cas monoïdale et monoïdale symétrique. Les travaux de Toën et Vezzosi et ceux de Lurie présentent des notions correspondantes de $(\infty, 1)$-catégories cofibrées, des objets $\mathcal{O}$-monoïdes et des objets $\mathcal{O}$-modules dans une ∞-catégorie $\mathcal{O}$-monoïdale. Nous les étendons aux cas des (∞, n)-catégories et nous rappelons le prolongement naturel des catégories abéliennes (resp. des anneaux commutatifs) au domaine des $(\infty, 1)$-catégories sous la forme des $(\infty, 1)$-catégories stables (resp. des E_∞-anneaux). On construit alors la $(\infty, 2)$-catégorie large ambiante dans laquelle le théorème de Tannaka ici prouvé sera vérifié : il s'agit de l'$(\infty, 2)$-catégorie des $(\infty, 1)$-catégories monoïdales symétriques, R-linéaires, présentables et stables.

D'un autre côté, cette dualité décrit les champs en groupes dérivés, ou, plus généralement, les gerbes dérivées. Nous introduisons et étudions ces objets avec un intérêt particulier porté aux sites de R-algèbres, où R est un E_∞-anneau, dotées de topologies positives, plates et finies. Ceci conduit à une discussion sur les t-structures d'une $(\infty, 1)$-catégorie stable. Nous commençons alors l'étude du théorème de dualité en introduisant les $(\infty, 1)$-catégories rigides, les R-algèbres de Hopf et le champ de foncteurs fibres. Le théorème de dualité est prouvé dans trois cas distincts, s'appliquant à des topologies différentes. Dans chacun de ces cas, la preuve repose sur une conjecture concernant les endomorphismes lax sur la $(\infty, 1)$-catégorie des R-modules et des R-algèbres.

Nous comparons la dualité de Tannaka supérieure à la théorie de dualité de Tannaka classique et portons une attention particulière à la dualité de Tannaka sur les corps. Dans ce dernier cas, cette théorie a une relation étroite avec la théorie des types d'homotopie schématique de Toën. Nous décrivons également trois applications de la théorie : les complexes parfaits, les motifs et leur analogue non-commutatif dû à Kontsevich.

Acknowledgements

Firstly, I would like to thank Mathai Varghese and Michael Murray for accepting me as their student at Adelaide. It was Mathai who first suggested I look at the classical Tannaka duality as a stepping stone to my interest in understanding the geometric Langlands program. I thank him for these comments and allowing me the freedom to uncover my own research topic. The first main paper I read on the subject of Tannaka duality was Lawrence Breen's beautifully written article in the motives proceedings. It is an honor to thank Lawrence for accepting to be part of this jury. The impetus for this thesis came about in around September 2007 after reading Bertrand Toën's habilitation memoir. This memoir has remained a source of inspiration throughout the duration of the project. It was Bertrand's memoir together with Jacob Lurie's work in the early DAG volumes that inspired me to think that a Tannaka duality theorem for infinity-categories could now be realisable. Thus it is a great pleasure to thank Jacob for accepting to be a reporter for my thesis. His insights into the theory of derived algebraic geometry are clear throughout this text.

My sincere gratitude goes to Carlos Simpson. His work on higher category theory has greatly influenced my work and so it was a great pleasure to know that he would be both a reporter and part of this jury. I would like to thank Ross Street and Dominic Verity for their support. My visit to Maquarie before moving to Toulouse was extremely valuable and rewarding. In Sydney and Adelaide I would especially like to thank Mark Weber, Craig Wegener and Tony Nesci. Upon arriving in Toulouse I was warmly welcomed by Michel Vaquié and Joseph Tapia. I would like to thank Michel and to Joseph and Denis-Charles Cisinki for accepting to be part of the jury. In Toulouse I would also like to thank my fellow students Chloé Grégoire, Thomas Gauthier and Alexandre Dezotti.

A large part of this thesis was written up at IHÉS. I wish to thank them for financal support. I would like to thank the University of Adelaide for financial support through a divisional scholarship, the department of mathematics at the University of Adelaide and the Emile Picard lab in Toulouse for travel support and greatfully acknowledge ANR grant HODAG for travel support.

Finally, and most importantly, I would like to thank Bertand Toën. This project has only come into fruition due to his mathematical insights, generocity and friendship.

♫: Shining: V (Halmstad), VI (Klagopsalmer) and VII (Född förlorare).

. . . To my father.

James Wallbridge
Toulouse 21/07/2011

Contents